Propositions mathématiques

1. Propositions mathématiques

<u>Définition</u> : Une **proposition mathématique** est un énoncé qui est soit vrai, soit faux.

Exemples :

- « Le carré d'un nombre réel est toujours positif. » est une proposition vraie.
- « Tout nombre premier est impair. » est une proposition fausse car 2 est un nombre premier et n'est pas impair.

<u>Remarques</u> :	*Exemples* :
Une proposition P peut dépendre d'une variable. On peut alors la noter P(*variable*).	P(*n*) : « le nombre entier *n* est un multiple de 2 ».
Dans ce cas, P(*variable*) peut être vraie pour certaines valeurs de la *variable* et fausse pour d'autres.	P(6) est vraie et P(7) est fausse.
De ce fait, dès que l'on souhaite écrire une proposition comportant un nombre *n*, il est nécessaire d'indiquer préalablement pour quelle(s) valeur(s) de *n* la proposition est vraie. Rappel : sur une copie, on ne s'attend à ne trouver que des propositions VRAIES !!	Pour tout entier naturel *n* **pair**, *n* est un multiple de 2.
En pratique, pour écrire une proposition contenant une variable, deux possibilités : • soit vous débutez vos propositions avec *n* par "pour tout *n* appartenant à ...., ..." • soit vous introduisez le nombre *n*, en indiquant comment vous le choisissez (dans quel ensemble, vérifiant quelle propriété...), puis vous énoncez votre propriété.	<u>Au choix</u> : • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1+\dfrac{1}{n}=\dfrac{n+1}{n}$ • Prenons un entier *n* dans $\mathbb{N}^*$. On a $1+\dfrac{1}{n}=\dfrac{n+1}{n}$ (OU Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $1+\dfrac{1}{n}=\dfrac{n+1}{n}$)

NB : bien sûr, les variables peuvent aussi être des nombres réels x, des points M du plan, des événements …

Méthodes pour déterminer si une proposition est vraie ou fausse :

- <u>*Si vous pensez qu'elle est vraie*</u> : il faut la **démontrer** en :
  - utilisant les définitions, propriétés, théorèmes du cours,
  - effectuant un calcul,
  - ou encore en faisant un raisonnement (par disjonction de cas, par l'absurde,…).
- <u>*Si vous pensez qu'elle est fausse*</u> : il suffit de trouver un **contre-exemple** (car s'il existe ne serait-ce qu'une valeur de la variable pour laquelle la propriété est fausse, alors la propriété est déclarée fausse dans son ensemble).

Exemples :

« Pour tout $x \in$ IR, $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ » est vraie car se démontre avec l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

« Pour tout entier naturel n, $n^3 - 3n^2 + 2n = 0$ » est fausse. Contre-exemple : $n = 3$.

2. A toi de jouer !

Vérifie que tu as bien compris ces notions de logique avec ce petit quizz ...